2.9 Diagonalisation de la matrice circulante et applications : déterminant circulant universel et suite de polygones (102, 149, 152, 153, 181, 191, 226)

Dans ce développement, on exhibe une procédure simple pour faire converger un polygone vers son isobarycentre : cette procédure marche pour tous les polygones, même les plus biscornus !

Théorème 2.23 (Convergence vers l'isobarycentre)**.** Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ un n-uplet de nombre complexes, représentés comme des points du plan complexe. Ce n-uplet représente un certain polygone $\mathscr{P}$ du plan. En définissant la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\left(z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$ représentant un polygone $\mathscr{P}_k$ ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Z_0 & = & (z_1, \dots, z_n)^T \\ Z_{k+1} & = & \left(\dfrac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \dots, \dfrac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}\right)^T \qquad \forall k \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que $\mathscr{P}_{k+1}$ est le polygone formé des milieux des côtés du polygone $\mathscr{P}_k$, alors on a :

$$Z_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} (g, \dots, g)^T$$

avec :

$$g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i,$$

représentant l'isobarycentre du polygone $\mathscr{P}$.

Démonstration. En écrivant matriciellement la relation de récurrence qui nous intéresse, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Z_{k+1} = C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right) Z_k$$

où, pour $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, la matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ désigne la matrice circulante :

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Z_k = C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right)^k Z_0.$$

On voudrait donc pouvoir la diagonaliser et regarder ses valeurs propres pour savoir vers quoi la suite de ses puissances itérées tend. Pour cela, une étude approfondie de la matrice circulante s'impose. Je propose deux preuves de la diagonalisabilité de la matrice circulante : une donnant les matrices de passages explicites avec la transformée de Fourier discrète, et l'autre en utilisant le critère abstrait de séparabilité d'un polynôme annulateur.

Proposition 2.24 (Diagonalisation de la matrice circulante)**.** Soient $P(X_0, \dots, X_{n-1})(T) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i T^i \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_{n-1}][T]$, et $C(X_0, \dots, X_{n-1}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_{n-1}])$ la « matrice circulante universelle » :

$$C(X_0, \dots, X_{n-1}) = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & X_0 & \cdots & X_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ X_1 & \cdots & X_{n-1} & X_0 \end{pmatrix}.$$

on a :

$$C(X_0, \dots, X_{n-1}) = P(X_0, \dots, X_{n-1})\left(C(0, 1, 0, \dots, 0)\right).$$

En particulier, $C(X_0, \dots, X_{n-1})$ se diagonalise ainsi :

$$C(X_0, \dots, X_{n-1}) = F_n^{-1} \begin{pmatrix} P(X_0, \dots, X_{n-1})(1) & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & P(X_0, \dots, X_{n-1})\left(\omega_n^{-n+1}\right) \end{pmatrix} F_n$$

où on a noté $\omega_n := e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et où $F_n \in GL_n(\mathbb{C})$ est une certaine matrice. On obtient alors le « déterminant circulant universel » :

$$\det(C(X_0, \dots, X_{n-1})) = \prod_{i=0}^{n-1} P(X_0, \dots, X_{n-1})\left(\omega_n^i\right),$$

Remarque 2.9.1. *Les calculs ont à chaque fois du sens car on peut plonger $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_{n-1}][T]$ dans $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_{n-1}][T]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_{n-1}])$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}[X_0, \dots, X_{n-1}])$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}[X_0, \dots, X_{n-1}])$.*

Démonstration 1 par le polynôme minimal. Remarquons le fait suivant :

$$C(0, 1, 0, \dots, 0) = P_{c_n^{-1}} = (P_{c_n})^T$$

où :

$$c_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n.$$

Ainsi, par propriété de morphisme de l'application $\sigma \mapsto P_\sigma$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad C(0, 1, 0, \dots, 0)^k = \left(P_{c_n^k}\right)^T.$$

Or, on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad c_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ k+1 & k+2 & \cdots & n & 1 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

et cette formule est même valable pour tout $k \in \mathbb{N}$ quitte à effectuer l'identification $n + j \leftrightarrow j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On observe donc :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \left(P_{c_n^k}\right)^T = C(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ zéros}}, 1, 0, \dots, 0).$$

On en déduit donc la formule :

$$P(X_0, \dots, X_{n-1})(C(0, 1, 0, \dots, 0)) = C(X_0, \dots, X_{n-1}).$$

On a également, du fait que $C(0, 1, 0, \dots, 0) = P_{c_n^{-1}}$ que le polynôme $X^n - 1$ annule $C(0, 1, 0, \dots, 0)$, et c'est même son polynôme minimal. Ainsi, étant donné que :

$$X^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (X - \omega_n^{-i})$$

on a que $C(0,1,0,\dots,0)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: il existe $F_n \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$C(0,1,0,\dots,0) = F_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \omega_n^{-n+1} \end{pmatrix} F_n.$$

Ainsi, on a :

$$C(X_0,\dots,X_{n-1}) = F_n^{-1} \begin{pmatrix} P(X_0,\dots,X_{n-1})(1) & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & P(X_0,\dots,X_{n-1})\left(\omega_n^{-n+1}\right) \end{pmatrix} F_n.$$

Ainsi, on obtient la formule du déterminant circulant :

$$\det(C(X_0,\dots,X_{n-1})) = \prod_{i=0}^{n-1} P(X_0,\dots,X_{n-1})\left(\omega_n^{-i}\right) = \prod_{i=0}^{n-1} P(X_0,\dots,X_{n-1})\left(\omega_n^{i}\right).$$

□

Démonstration par Fourier discret. On veut diagonaliser la matrice $C(0,1,0,\dots,0)$. On observe que, en notant c l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice, on a :

$$\forall (z_0,\dots,z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \quad c(z_0,\dots,z_{n-1}) = (z_{n-1}, z_0, \dots, z_{n-2})$$

ce qui correspond, quitte à effectuer l'identification entre $[\![0, n-1]\!]$ et $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, à une action par translation. En effet, si f est une fonction continue 1-périodique telle que :

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!], \quad f\left(\frac{j}{n}\right) = z_j$$

alors :

$$c\left((z_j)_{0\le j\le n-1}\right) = \left(\tau_{\frac{1}{n}} f\left(\frac{j}{n}\right)\right)_{0\le j\le n-1}.$$

Or, on sait que pour les fonctions périodiques, passer aux coefficients de Fourier transforme les translations en multiplication composantes par composantes par des exponentielles complexes. La méthode Fourier permettrait donc de pouvoir diagonaliser facilement la matrice ! Comment transposer le calcul des coefficients de Fourier (qui est une intégrale) dans notre cas discret ? On peut faire une méthode des rectangles ! Posons alors :

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{F}_n & : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & & (z_0,\dots,z_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} z_j e^{-\frac{2i\pi kj}{n}}\right)_{0\le k\le n-1} \end{array}.$$

Il s'agit d'une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est :

$$F_n = \frac{1}{n}\left(\omega_n^{-jk}\right)_{0\le j,k\le n-1}.$$

On voudrait, pour calculer F_n^{-1}, transposer également la formule d'inversion de Fourier. Posons alors :

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{G}_n & : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & & (c_0,\dots,c_{n-1}) & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{\frac{2i\pi kj}{n}}\right)_{0\leq k\leq n-1} \end{array}.$$

Cette application est également linéaire et sa matrice dans la base canonique est :

$$G_n = \left(\omega_n^{jk}\right)_{0\leq j,k\leq n-1}.$$

Miracle ! C'est bien l'inverse de $\mathscr{F}_n$! En effet, on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0,n-1]\!],\quad \mathscr{F}_n\left(\mathscr{G}_n(c_0,\dots,c_{n-1})\right)_k &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{m=0}^{n-1} c_m e^{\frac{2i\pi jm}{n}}\right)e^{-\frac{2i\pi jk}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} c_m \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi(m-k)}{n}}}_{=n\delta_{mk}}\right) \\ &= c_k. \end{aligned}$$

De plus, on a, en effectuant l'identification périodique :

$$\begin{aligned} \forall j_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0,n-1]\!],\quad \mathscr{F}_n\left((z_{j+j_0})_{0\leq j\leq n-1}\right)_k &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} z_{j+j_0} e^{-\frac{2i\pi jk}{n}} \\ &= e^{\frac{2i\pi kj_0}{n}}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} z_{j+j_0} e^{-\frac{2i\pi k(j+j_0)}{n}} \\ &= e^{\frac{2i\pi kj_0}{n}}\mathscr{F}_n\left((z_j)_{0\leq j\leq n-1}\right)_k. \end{aligned}$$

Le dernier calcul peut être perturbant. En fait, on n'a besoin de le montrer que pour $j_0 \in [\![1,n-1]\!]$ grâce à l'identification périodique (n se comporte comme 0). Regardons donc en détail :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} z_{j+j_0} e^{-\frac{2i\pi k(j+j_0)}{n}} &= \frac{1}{n}\sum_{j=j_0}^{n-1} z_j e^{-\frac{2i\pi kj}{n}} + \frac{1}{n}\sum_{j=n-j_0}^{n-1} z_{j+j_0} e^{-\frac{2i\pi k(j+j_0)}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=j_0}^{n-1} z_j e^{-\frac{2i\pi kj}{n}} + \frac{1}{n}\sum_{j=n-j_0}^{n-1} \underbrace{z_{j+j_0-n}}_{\substack{\text{identification}\\ \text{périodique}}} e^{-\frac{2i\pi k(j+j_0-n)}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=j_0}^{n-1} z_j e^{-\frac{2i\pi kj}{n}} + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{j_0-1} z_j e^{-\frac{2i\pi kj}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} z_j e^{-\frac{2i\pi kj}{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi, en particulier :

$$\mathscr{F}_n \circ c = d \circ \mathscr{F}_n$$

où d est l'endomorphisme diagonal canoniquement associé à la matrice $\mathrm{Diag}\left(\left(\omega_n^{-k}\right)_{0\leq k\leq n-1}\right)$. Matriciellement, on a donc :

$$C(0,1,0,\dots,0) = F_n^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \omega_n^{-n+1} \end{pmatrix} F_n.$$

$\square$

Pour notre suite de polygone, on a donc une diagonalisation de la matrice d'itération :

$$C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right) = F_n^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \frac{1}{2}+\frac{\omega_n^{-n+1}}{2} \end{pmatrix} F_n.$$

On peut également utiliser la formule du déterminant circulant universel pour calculer le polynôme caractéristique de la matrice d'itération :

$$\chi_{C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right)} = \det\left(C\left(X-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,\ldots,0\right)\right) = \prod_{i=0}^{n-1}\left(X-\frac{1}{2}-\frac{\omega_n^i}{2}\right).$$

et trouver les valeurs propres de $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right)$ et en conclure qu'elle est diagonalisable étant donné que son polynôme caractéristique est scindé. Dans tous les cas, on obtient donc :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad Z_k = F_n^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \left(\frac{1+\omega_n^{-n+1}}{2}\right)^k \end{pmatrix} F_n Z_0.$$

Soit alors $j\in [\![1,n-1]\!]$. Examinons le module du nombre $\frac{1+\omega_n^j}{2}$ et vérifions qu'il est bien strictement inférieur à 1 :

$$\frac{1+\omega_n^j}{2} = e^{\frac{i\pi j}{n}}\,\frac{e^{-\frac{i\pi j}{n}}+e^{\frac{i\pi j}{n}}}{2} = e^{\frac{i\pi j}{n}}\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right).$$

D'où :

$$\left|\frac{1+\omega_n^j}{2}\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right| < 1$$

car :

$$\frac{\pi j}{n}\in(0,\pi)$$

Ainsi, la suite vectorielle (Z_k) converge et on a :

$$Z_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} F_n^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} F_n Z_0.$$

Si on a fait la preuve avec Fourier discret, on sait que :

$$F_n = \frac{1}{n}\left(\omega_n^{-ij}\right)_{0\le i,j\le n-1}$$

et :

$$F_n^{-1} = \left(\omega_n^{ij}\right)_{0\le i,j\le n-1}.$$

Ainsi :

$$F_n^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} F_n = \frac{1}{n}F_n^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On en conclut :

$$Z_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \end{pmatrix}.$$

Cela termine donc la preuve ! Si on n'a pas utilisé Fourier discret, on peut s'en sortir en disant que la matrice :

$$F_n^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} F_n$$

est la matrice de projection sur l'espace propre de $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)$ associé à la valeur propre 1. Or, on sait que cet espace propre est de dimension 1 et que le vecteur :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

y appartient. Ainsi :

$$\lim_{k\to+\infty} Z_k = \begin{pmatrix} g' \\ \vdots \\ g' \end{pmatrix}$$

pour un certain $g' \in \mathbb{C}$. Or, un calcul rapide (ou l'associativité du barycentre) montre que l'isobarycentre de $\mathscr{P}_{k+1}$ est le même que celui de $\mathscr{P}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc le même que celui de $\mathscr{P}_0$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = g.$$

En passant à la limite dans cette égalité, on obtient :

$$g' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g' = g.$$

Cela conclut donc cette preuve ! $\square$